

УДК 004.942 + 623.454.862

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЕКТОРА ВЫХОДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЛУЧАЙНОГО ПРОЕКТОРА

Тищук А.В.

*Международный научно-учебный центр информационных технологий и систем
НАН и МОН Украины*

Введение

Часто встречающейся на практике задачей, связанной с восстановлением сигналов по результатам не прямых измерений является следующая задача. Имеется линейная измерительная система, результат измерений которой представляет собой вектор, соответствующий некоторому входному сигналу. Известна матрица линейного преобразования вход-выход, описывающая взаимодействие измеряемого сигнала со средой и особенности измерительных средств. Столбцы матрицы можно рассматривать как отсчеты дискретно заданных базисных функций линейной системы. Набор базисных функций отражает свойства конкретной измерительной системы, поэтому не может быть произвольным. Соответственно, наблюдаемый выход, может не отвечать требованиям пользователя или быть не совместимым с методами дальнейшей обработки. В случае если известен набор базисных функций, которые дали бы выход с необходимыми свойствами, можно поставить задачу нахождения преобразования наблюдаемого выхода в выход системы с заданным базисом. Существующие методы преобразования выхода [1] ориентированы на случай, когда матрица линейного преобразования исходной системы и ковариационная матрица шума – не вырожденные. Если же матрица исходной системы имеет высокое число обусловленности и ряд ее сингулярных чисел плавно спадает до нуля, получаемое известными методами решение является неустойчивым. Поэтому **целью** работы является разработка и исследование устойчивых и вычислительно эффективных методов преобразования выхода линейной системы в выход системы с заданным базисом.

В данной работе развивается подход к разработке устойчивых и вычислительно эффективных методов преобразования выхода линейной системы с использованием рандомизации [2, 3]. Приведены новые результаты по использованию в качестве проектора ортонормальной случайной матрицы, проведено разложение ошибки преобразования выхода на стохастическую и детерминированную составляющие, проведено экспериментальное исследование зависимости ошибки от размерности матрицы проектора.

Рассмотрим задачу преобразования выхода линейной системы.

Задача преобразования выхода

Пусть сигнал \mathbf{b} получен с выхода линейной системы A , выполняющей преобразование

$$\mathbf{Ax} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}, \quad (1)$$

где $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^n$, $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{R}^n$, и

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_0. \quad (2)$$

Обозначим как \mathbf{d}_0 выход линейной системы C , выполняющей преобразование

$$\mathbf{Cx} = \mathbf{d}_0. \quad (3)$$

Для получения решения – оценки выхода системы C по \mathbf{b} – сначала получим оценку \mathbf{x}' входа \mathbf{x} , решив обратную задачу:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P} \mathbf{b}, \quad (4)$$

где \mathbf{P} – оператор (матрица), преобразующий выход \mathbf{b} в \mathbf{x}' .

Затем получим оценку выхода системы C :

$$\mathbf{d}' = \mathbf{C} \mathbf{x}' = \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{b} = \mathbf{T} \mathbf{b} \quad (5)$$

Таким образом, оператор \mathbf{CP} преобразует \mathbf{b} в \mathbf{d}' . Матрицу преобразования $\mathbf{T} = \mathbf{CP}$ в [1] называют матрицей редукции.

Конкретный вид \mathbf{P} зависит от свойств матрицы \mathbf{A} . Если ряд собственных чисел \mathbf{A} спадает монотонно и число обусловленности велико, то задачу относят к классу дискретных некорректных задач. Приближенные решения дискретных некорректных задач как задач наименьших квадратов с использованием численных методов линейной алгебры, таких как разложения LU, Холецкого, QR, являются неустойчивыми. Это означает, что малые возмущения во входных данных приводят к большим возмущениям в решении. В работе [4] нами предложен и исследован подход к устойчивому решению задачи преобразования выхода на основе усеченного сингулярного разложения.

Преобразование вектора выхода с использованием случайного проектора

В данной работе рассмотрим подход к устойчивому решению задачи преобразования выхода с использованием случайного проецирования.

Получим оценку сигнала входа \mathbf{x}' , используя подход к устойчивому решению дискретной некорректной задачи на основе рандомизации в котором в качестве матрицы проектора используем матрицу $\boldsymbol{\Omega}_k$. Зададим матрицу $\mathbf{G} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ элементы которой – реализации случайной величины с нормальным распределением, нулевым средним и единичной дисперсией. Матрицу $\boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ получим как результат собственного разложения $\mathbf{G} = \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Omega}^T$, где $\boldsymbol{\Omega}$ – ортонормированная матрица, $\boldsymbol{\Sigma}$ – диагональная. Матрицу $\boldsymbol{\Omega}_k \in \mathcal{R}^{k \times n}$ получим как результат отбора k строк матрицы $\boldsymbol{\Omega}$.

Умножив левую и правую части выражения (1) на Ω_k , получим:

$$\Omega_k \mathbf{A} \mathbf{x} = \Omega_k \mathbf{b}, \quad (6)$$

где $\Omega_k \mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{k \times n}$, $\Omega_k \mathbf{b} \in \mathfrak{R}^k$. Число столбцов n определяется размерностью матрицы \mathbf{A} , число строк k априорно неизвестно. Оценку сигнала \mathbf{x} получим с помощью псевдообратной матрицы $(\Omega_k \mathbf{A})^+$ как:

$$\mathbf{x}' = (\Omega_k \mathbf{A})^+ \Omega_k \mathbf{b}. \quad (7)$$

С учетом (7), оценка выхода \mathbf{d}' системы \mathbf{C} выглядит следующим образом:

$$\mathbf{d}' = \mathbf{C} \mathbf{x}' = \mathbf{C} (\Omega_k \mathbf{A})^+ \Omega_k \mathbf{b} = \mathbf{T}_k \mathbf{b}, \quad (8)$$

где $\mathbf{T}_k = \mathbf{C} (\Omega_k \mathbf{A})^+ \Omega_k$. Запишем выражение для вектора ошибки преобразования выхода в случае проецирования матрицей Ω_k :

$$\mathbf{d}' - \mathbf{d}_0 = \mathbf{C} (\Omega_k \mathbf{A})^+ \Omega_k (\mathbf{b}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{C} ((\Omega_k \mathbf{A})^+ \Omega_k \mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{x} + \mathbf{C} (\Omega_k \mathbf{A})^+ \Omega_k \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (9)$$

Усредним квадрат нормы выражения (9) по реализациям шума $\boldsymbol{\varepsilon}$. Учитывая, что $\Omega_k \Omega_k^T = \mathbf{I}$,

$E \| \mathbf{C} (\Omega_k \mathbf{A})^+ \Omega_k \boldsymbol{\varepsilon} \|^2 = \sigma^2 \text{trace} (\Omega_k^T (\Omega_k \mathbf{A})^+ \mathbf{C}^T \mathbf{C} (\Omega_k \mathbf{A})^+ \Omega_k)$, $2E \langle \mathbf{C} ((\Omega_k \mathbf{A})^+ \Omega_k \mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{x}, \mathbf{C} (\Omega_k \mathbf{A})^+ \Omega_k \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = 0$, получим следующее выражение для среднеквадратичной ошибки преобразования вектора выхода при проецировании матрицей Ω_k :

$$e = e_1 + e_2 = \| \mathbf{C} ((\Omega_k \mathbf{A})^+ \Omega_k \mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{x} \|^2 + \sigma^2 \text{trace} ((\Omega_k \mathbf{A})^+ \mathbf{C}^T \mathbf{C} (\Omega_k \mathbf{A})^+). \quad (10)$$

Здесь $e_1 = \| \mathbf{C} ((\Omega_k \mathbf{A})^+ \Omega_k \mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{x} \|^2$ – детерминированная составляющая ошибки преобразования выхода, $e_2 = \sigma^2 \text{trace} ((\Omega_k \mathbf{A})^+ \mathbf{C}^T \mathbf{C} (\Omega_k \mathbf{A})^+)$ – стохастическая составляющая.

Для ошибки преобразования выхода построим зависимость суммарной ошибки, детерминированной и стохастической ее составляющих от размерности матрицы k . Для проведения численного эксперимента сформируем матрицы \mathbf{A} и \mathbf{C} так, что столбцы содержат n отсчетов радиальных базисных функций: $f_N(z) = \exp(-g(z-c)^2)$, $c = dN + b$, ($d=5$, $b=20$), $z = \{1, \dots, 100\}$, N – номер базисной функции. Для исходной линейной системы $g = 0.05$, для системы \mathbf{C} значение $g = 0.3$. Компоненты вектора \mathbf{x} назначим следующими: $x_5 = 1$, $x_6 = 0.5$, $x_{10} = 1$, $x_{11} = 0.26$, $x_{12} = 0.25$, другие компоненты вектора \mathbf{x} – нулевые. Векторы \mathbf{b}_0 , \mathbf{d}_0 , получим как $\mathbf{A} \mathbf{x}$, $\mathbf{C} \mathbf{x}$ соответственно. В качестве шума будем использовать случайную величину с гауссовым распределением и среднеквадратичным отклонением $\{5E-4, 5E-6, 5E-8\}$. Пример зависимостей приведен на рис.1.

Из рисунка видно, что для преобразования выхода с использованием проецирования матрицей Ω зависимость e от k имеет минимум при $k < N$. С ростом уровня шума положение минимума смещается в область меньших значений k , а ошибка в точке минимума растет. Оптимальным числом строк k проекционной

матрицы следует считать такое, при котором минимальна среднеквадратичная ошибка преобразования выхода.

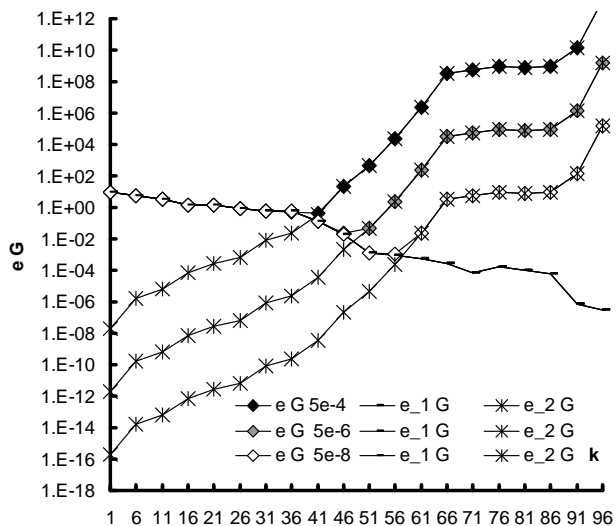


Рис. 1. Зависимость ошибки e от размерности k

использованием проекционной матрицы Ω обеспечивает достаточно точное и устойчивое преобразование выхода линейной системы в выход системы с заданным базисом для случая, когда матрица A базисных функций исходной линейной системы имеет высокое число обусловленности и ряд ее сингулярных чисел плавно спадает к нулю.

Литература

1. Пытьев Ю.П. Математические методы интерпретации эксперимента / Ю.П. Пытьев М.: Высшая школа. – 1989. – 351 с.
2. Рачковский Д.А. Рандомизированные проекционные методы формирования бинарных разреженных векторных представлений / Д.А. Рачковский, И.С. Мисун, С.В. Слипченко // Кибернетика и системный анализ – 2012. – № 1. – С. 176-188.
3. Revunova E.G. Using randomized algorithms for solving discrete ill-posed problems / E.G. Revunova, D.A. Rachkovskij // International Journal "Information Theories and Applications" – 2009. – N 2. – P. 176-192.
4. Ревунова Е.Г. Устойчивое преобразование выхода линейной системы в выход системы с заданным базисом на основе случайных проекций / Е.Г. Ревунова, Д.А. Рачковский, А.В. Тищук // XVI Международная конференция по нейрокибернетике (ICNC-12) – 2012. – vol.2. – P. 180-183.

Выводы

Проведено исследование метода преобразования выхода линейной системы в выход системы с заданным базисом с использованием ортонормированного случайного проектора.

Для подхода к устойчивому решению задачи преобразования выхода получены выражения для составляющих ошибки преобразования выхода, проведено экспериментальное исследование поведения зависимости ошибки решения и ее составляющих от размерности матрицы проектора. Преобразование выхода с